

6 класс

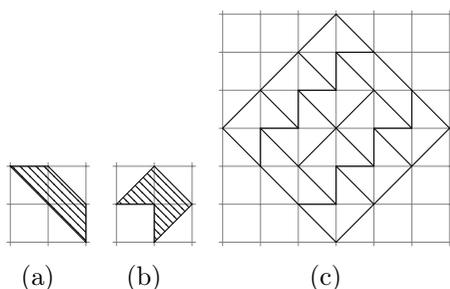


Рис. 1:

третью исходного числа переставить цифры, то получится куб средней цифры. Найти исходное число. (Число не может начинаться с нуля.)

РЕШЕНИЕ: Произведение двух цифр — не более, чем двузначное число. По условию, произведение первой и третьей цифры — двузначное число; число, в котором переставили цифры — тоже двузначное.

Переберем кубы однозначных чисел, для которых они двузначны. Это $3^3 = 27$ и $4^3 = 64$. Значит, произведение первой и третьей цифры либо 72, либо 46. Но 46 не представляется в виде произведения однозначных чисел. Следовательно, произведение равно 72.

72 единственным образом представляется в виде произведения однозначных чисел ($72 = 9 \cdot 8$). Значит, исходное число 938.

3. Есть прямоугольник 3×5 . Игроки ведут путь из левого нижнего угла в правый верхний угол: первый рисует отрезок в соседний узел по диагонали, второй из полученной точки — в соседний по стороне и так далее. Нельзя пересекать свой путь ни в одной точке. Кто первым придет в противоположный угол, тот победил. Кто победит при правильной игре независимо от

ходов противника, и как он для этого должен играть?

РЕШЕНИЕ: Играть будем за второго игрока. Покажем, что независимо от игры первого, второму всегда удастся победить.

Заметим, что у первого игрока сначала ровно один ход. Тогда второй игрок будет «прижимать» первого к левой стенке. Такой ход приводит первого игрока к безвыходной ситуации: после любого такого хода второго игрока первому остается только один единственный ход. Тогда к шестому ходу второй игрок попадет в правый верхний угол.

1. Необходимо разрезать квадрат на рисунке 1(с) на фигурки вида 1(а) и 1(б), причем фигурок вида 1(а) должно быть ровно две. Фигурки можно поворачивать и переворачивать.

РЕШЕНИЕ: Пример разрезания приведен на рисунке 1(с).

2. Дано четное трехзначное число.

Если в произведении первой цифры на третью исходного числа переставить цифры, то получится куб средней цифры. Найти исходное число. (Число не может начинаться с нуля.)

РЕШЕНИЕ: Произведение двух цифр — не более, чем двузначное число. По условию, произведение первой и третьей цифры — двузначное число; число, в котором переставили цифры — тоже двузначное.

Переберем кубы однозначных чисел, для которых они двузначны. Это $3^3 = 27$ и $4^3 = 64$. Значит, произведение первой и третьей цифры либо 72, либо 46. Но 46 не представляется в виде произведения однозначных чисел. Следовательно, произведение равно 72.

72 единственным образом представляется в виде произведения однозначных чисел ($72 = 9 \cdot 8$). Значит, исходное число 938.

3. Есть прямоугольник 3×5 . Игроки ведут путь из левого нижнего угла в правый верхний угол: первый рисует отрезок в соседний узел по диагонали, второй из полученной точки — в соседний по стороне и так далее. Нельзя пересекать свой путь ни в одной точке. Кто первым придет в противоположный угол, тот победил. Кто победит при правильной игре независимо от

ходов противника, и как он для этого должен играть?

РЕШЕНИЕ: Играть будем за второго игрока. Покажем, что независимо от игры первого, второму всегда удастся победить.

Заметим, что у первого игрока сначала ровно один ход. Тогда второй игрок будет «прижимать» первого к левой стенке. Такой ход приводит первого игрока к безвыходной ситуации: после любого такого хода второго игрока первому остается только один единственный ход. Тогда к шестому ходу второй игрок попадет в правый верхний угол.

4. Известно, что $(a-b+2022)$, $(b-c+2022)$ и $(c-a+2022)$ — в указанном порядке три последовательных целых числа. Найдите эти числа.

РЕШЕНИЕ: Обозначим первое из представленных чисел $x - 1$, тогда два следующих — это x и $x + 1$. Значит, сумма этих чисел равна $3x$. Следовательно, $(a - b + 2022) + (b - c + 2022) + (c - a + 2022) = 3x$. Поэтому $x = 2022$. Числа, которые записаны: 2021, 2022, 2023.

5. Найдите количество способов раскрасить все натуральные числа от 1 до 30 в зелёный и чёрный цвета так, чтобы **оба цвета встречались** и произведение всех зелёных чисел было **взаимно просто** с произведением всех чёрных чисел.

РЕШЕНИЕ: Рассмотрим простые числа, которые входят в множество натуральных чисел до 30 — это 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Все числа, кратные 2, должны быть в одной группе, следовательно, в этой же группе находятся числа, кратные 3, 5, 7, 11 и 13. Кратных 17, 19, 23, 29 среди чисел от 1 до 30, кроме предложенных нет, поэтому эти числа образуют еще 4 новые группы. Кроме того, есть число 1, которое тоже образует группу. Значит, всего способов раскрасить числа — 2^6 . Однако из этого количества нужно вычесть 2 способа, при которых получается одноцветная раскраска всех чисел.

ОТВЕТ: $2^6 - 2$.

6. На рисунке 3 изображена окружность, на которой отмечены 12 точек таких, что все они лежат в узлах сетки. Сколько прямоугольников можно образовать с вершинами в данных точках? (Считаем известным факт, что угол, опирающийся на диаметр — прямой. Например, $\angle A_1 A_{11} A_7$ опирается на диаметр — значит, он прямой.)

РЕШЕНИЕ: Возьмем две противоположные вершины прямоугольника A_1 и A_7 . Тогда к этим вершинам в четверку можно поставить еще 5 пар диаметрально противоположных вершин.

Дальше возьмем A_2 и A_8 , к ним можно добавить в четверку уже 4 пары вершин. Для пары A_3 и A_9 — 3 пары вершин, для пары A_4 и A_{10} — 2, для A_5 и A_{11} — 1. Значит, всего прямоугольников $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = \frac{5+1}{2} \cdot 5 = 15$.

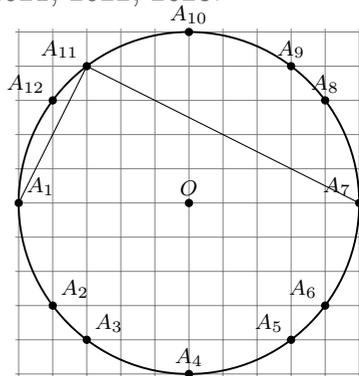


Рис. 3: